• 17+14+16+18+25 = 90   9

Numerieke Wiskunde I

30 jan 2008

.1. a) (1) $\cos(x) - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(\cos(x) - x^2) + x = x$

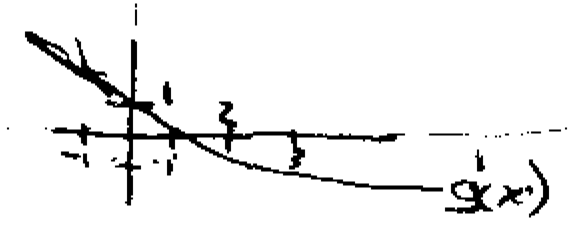
$g(x) = \alpha(\cos(x) - x^2) + x$

$g'(x) = \alpha(-\sin(x) - 2x) + 1$

(9)

• Kies $\alpha = 0,4$, dan $|g'(x)| \leq 1$ op $[0,2]$

• deze $g(x)$ is ook continu op $\langle 0,2 \rangle$



• $g(\tilde{x}) = \tilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(\cos(\tilde{x}) - \tilde{x}^2) + \tilde{x} = \tilde{x}$

$\Leftrightarrow \quad \cos(\tilde{x}) - \tilde{x}^2 = 0$, dus $\tilde{x}$ nulpunt

Als we met het startinterval $[0,5 ; 1,5]$ beginnen, dan is $\underset{g'(0,5)}{\approx} -0,20 \leq g'(x) \leq 0,56 \approx g(1,5)$

Dus dan $|g'(x)| \leq 0,56 < 1$

(2) Volgens de convergentiestelling geldt dan: (p = nulpunt)

$|\varepsilon_{n+1}| \approx g'(p) \, |\varepsilon_n|$, dus hier is sprake van lineaire convergentie met "snelheid" $g'(p) \approx g'(0,5) \approx 0,52$

(3) $\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - p| = |x_{n+1} - x_n + x_n - p| \leq |x_{n+1} - x_n| + |x_n - p|$

$\approx |x_{n+1} - x_n| + \dfrac{|x_{n+1} - p|}{|g'(p)|}$ ← want $|x_{n+1} - p| \approx |g'(p)(x_n - p)|$

$\Rightarrow |x_{n+1} - p| \left| \left(1 - \dfrac{1}{|g'(p)|}\right) \right| \lesssim |x_{n+1} - x_n|$

$\Rightarrow |x_{n+1} - p| \leq \left| \dfrac{g'(p)}{g'(p) - 1} \right| |x_{n+1} - x_n| = \dfrac{k}{1-k} |x_{n+1} - x_n|$ ← k = convergentiefactor $= |g'(p)| < 1$

(b) (1) Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

(8)

$f(x) = \cos(x) - x^2 \qquad f'(x) = -\sin x - 2x$

Dus: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n^2}{-\sin(x_n) - 2x_n}$

kwadratisch

(2) Voordeel: convergeert sneller dan successieve substitutie

Nadeel: Je moet elke keer de afgeleide berekenen in x_n en de tweede afgeleide moet begrensd zijn ($\in I$) voor convergentie.

(3) Secant: $f'(x_n) \approx \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Dit geeft

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot (x_n - x_{n-1})$

Voordeel:
Nu hoef je geen $f'(x_n)$ meer te bepalen. Je moet wel $f(x_{n-1})$ even onthouden.

2 (a) (1) $\int_{0,2}^{0,3} 3x^2\,dx \approx (0,3-0,2)\left(\frac{f(0,3)+f(0,2)}{2}\right)$, met $f(x)=3x^2$

$= 0,1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3\cdot(0,3)^2 + 3\cdot(0,2)^2\right)$
$= 0,05 \cdot 0,39 = 0,033$

5

(2) Rechthoekregel: $\int_{0,2}^{0,3} 3x^2\,dx \approx (0,3-0,2)\cdot f(0,25)$
$= 0,1 \cdot 3 \cdot (0,25)^2 = 0.01875$

Exact: $\int_{0,2}^{0,3} 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_{0,2}^{0,3} = 0,019$

De rechthoekregel geeft hier een beter antwoord dan de trapezium-regel.
De rechthoek regel is ~~[illegible]~~ net als de trapeziumregel een eerste orde methode, maar de lokale fout (van rechthoekregel) kan soms iets kleiner zijn dan bij de trapeziumregel

(b) (1) De convergentie is tweede orde.
$\varepsilon_n = I(n) - I$
$\varepsilon_{64} / \varepsilon_{128} = \frac{6.10\cdot10^{-5}}{1.53\cdot10^{-5}} \approx 3.987$

9

$\varepsilon_{32} / \varepsilon_{64} = \frac{24.4}{6.10} = 4$
Dus er geldt ongeveer: $\varepsilon_n \approx 4\,\varepsilon_{2n}$
Dus als je de lengte van de intervallen halveert (n wordt $2n$) dan wordt de fout $4=2^2$ keer zo klein. Vandaar tweede orde convergentie.
(2) Als je er van uit gaat dat de convergentie zo doorzet kun je oplossen: $1,53\cdot10^{-5}\cdot 4^{-k} \leq 10^{-8}$
$\Rightarrow 4^{-k} \leq 6,53595\cdot10^{-4}$
$-k \lesssim \frac{\log(6,53595\cdot10^{-4})}{\log(4)} \approx -5,28$
Dus $k \gtrsim 5,28$
Dus neem $k=6$ dan $1,53\cdot10^{-5}\cdot 4^{-6} \leq 10^{-8}$

Dus nog 6 keer je interval verkleinen en dan heb je dus ongeveer $120 \cdot 2^6 = 8192$ intervallen nodig.

(3) $Q(h/2) \simeq 4$ theoretisch, $T(h)$ is benadering bij deze $h = \frac{1}{n}$

$$Q(h/2) = \frac{T(h) - T(h/2)}{T(h/2) - T(h/4)}$$

$$T(h) \simeq I + \alpha h^2, \quad T(h/2) \approx I + \alpha \frac{h^2}{4}, \quad T(h/4) \simeq I + \alpha \frac{h^2}{16}$$

$$\Rightarrow Q(h/2) \approx \frac{I + \alpha h^2 - I - \alpha h^2/4}{I + \alpha\frac{h^2}{4} - I - \alpha h^2/16} = \frac{\alpha(h^2 - h^2/4)}{\alpha(h^2/4 - h^2/16)} = \frac{3/4\, h^2 \alpha}{3/16\, h^2 \alpha} = \frac{16}{4} = 4$$

(4) $\varepsilon_{64} \approx \frac{1}{3}|I(64) - I(\cancel{32}\ 128)| = \frac{1}{3}|0{,}99993896 4 \ldots - 0{,}999755859|$
$\approx \frac{1}{3} 1{,}831 \cdot 10^{-4} = 6{,}103 \cdot 10^{-5}$ $\approx 6{,}10 \cdot 10^{-5}$ $=$ echte fout.

Deze fout-afschatting is wel goed!

(5) $I_2(\cancel{120}\ 64) = \frac{4}{3} I(\cancel{120}\ 64) - \frac{1}{3} I(\cancel{64}\ 128)$

$= 1{,}333312988 - 0{,}3333129883$
$= 0{,}9999999997$

3 (a) (1) Euler: $y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$

$y' = -2y + x = f(x, y)$

Dit geeft $y_{n+1} = y_n + h \cdot (-2y_n + x_n)$

$\Leftrightarrow y_{n+1} + 2h\, y_{n+1} = y_n + h x_n$

$$y_{n+1} = \frac{y_n + h x_n}{1 + 2h}$$

(2) Stel $y_n + \delta_n$ ipv. y_n. dan

$$y_{n+1} = \frac{y_n + \delta_n + h x_n}{1 + 2h} = \frac{y_n + h x_n}{1 + 2h} + \underbrace{\frac{\delta_n}{1 + 2h}}_{\delta_{n+1}}$$

Dus de fout in y_{n+1} (δ_{n+1}) hangt af van de fout in y_n (δ_n) op deze manier: $\delta_{n+1} = \frac{\delta_n}{1+2h}$

Omdat $h > 0$, is $1 + 2h > 1$, dus $\frac{1}{1+2h} \leq 1$, dus voor alle $h > 0$ is deze methode stabiel.

$\boxed{16}$

(b) $y^*_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_{n+1}, y^*_{n+1}) + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$ } Heun

In dit geval: $y^*_{n+1} = y_n + h \cdot (-2y_n + x_n) = (1-2h)y_n + hx_n$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_n(1-2h) + hx_n)$
$= y_n + h \cdot (-2((1-2h)y_n + hx_n) + x_{n+1})$
$= y_n + -2h(1-2h)y_n - 2h \cdot hx_n + h \cdot x_{n+1}$
$\Rightarrow y_{n+1} = (1-2h)(1-2h)y_n + hx_{n+1} - 2h^2x_n$

foute Heun

(c) (1en2) $T_n(h) \simeq Y(x_n) + \alpha h^2 + \beta h^4$

$T_n(h)$ is trapeziummethode oplossing voor $Y(x_n)$ bij stapgrootte h

$T_n(h/2) \simeq Y(x_n) + \alpha \frac{h^2}{4} + \beta \frac{h^4}{16}$

$4T_n(h/2) - T_n(h) \approx 4Y(x_n) + \alpha h^2 - Y(x_n) - \alpha h^2 + \beta \frac{h^4}{4} - \beta h^4$
$= 3Y(x_n) - \beta \frac{3}{4} h^4$

Dus $\frac{4T(h/2) - T(h)}{3} \approx Y(x_n) - \beta \cdot \frac{h^4}{4}$ Dus dit heeft

een fout van orde $\sigma(h^4)$! Dus vierde orde nauwkeurigheid

(d) (1) $y_{n+1} - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx \approx \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x_n, Y(x_n))\,dx$

$= 2h\, f(x_n, Y(x_n))$
$= 2h \cdot (-2Y(x_n) + x_n)$
$= -4h\, Y(x_n) + x_n \cdot 2h$
$\approx -4h[y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})] + 2h \cdot x_n$
$= -4h y_{n-1} - 4h^2(-2y_{n-1} + x_{n-1})$
$+ 2hx_n$

(2) expliciete, ~~twee~~ stapsmethode, 2^e orde.

4 (a) $e := \tilde{x} - x \Rightarrow Ae = A\tilde{x} - Ax = b + r - b = r$

$Ae = r \Rightarrow \|A\|\,\|e\| \geq \|r\| \Rightarrow \|e\| \geq \frac{\|r\|}{\|A\|}$

$e = A^{-1} r \Rightarrow \|e\| \leq \|A^{-1}\|\,\|r\|$

$\Rightarrow \frac{\|r\|}{\|A\|\,\|x\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\,\|r\|}{\|x\|}$

$Ax = b \Rightarrow \|x\| \geq \|b\|/\|A\|$

$x = A^{-1}b \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|b\|$

$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$

$\frac{1}{\|x\|} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|\,\|b\|}$

5

$$\Rightarrow \frac{\|r\|}{\|A\|\|A^{-1}\|\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|b\|}\|A\|$$

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|r\|}{\|b\|}\cdot\kappa(A)$$

(b) Deze tridiagonale matrix ga je ontbinden in een product van een benedendriehoeksmatrix L en een bovendriehoeksmatrix U.

Als $A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & b_n & a_n \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ \beta_1 & \ddots & \\ 0 & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}$ en $U = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

5

$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$

Los eerst op $Ly = b$ en daarna $Ux = y$.

Zeer snel, want # operaties $\sim O(8n)$

(c) Jacobi: $A = N - P = D + (L+R)$. Oplossen $Ax = b$ met

$$x^{m+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L+R)x^m$$

6

Iteratiematrix: $M = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} -1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3/10 & -1/10 \\ 2/10 & 0 & 3/10 \\ -1/10 & -3/10 & 0 \end{pmatrix}$$

De matrix A is diagonaal dominant, dus Gauss-Seidel is convergent. $\Leftarrow |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} |a_{ij}|$

3,2

(d) SOR: $\overset{*}{x}^{m+1} = c + M_g x^m$ ← zit nog stukje $m+1$ bij

$$x^{m+1} = \omega \overset{*}{x}^{m+1} \pm (1-\omega)x^m \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

$$= (c + M_g x^m)\omega \pm (1-\omega)x^m$$

$$= \omega c + \underbrace{(\omega M_g \pm (1-\omega)I)}_{M_{sor} \,=\, \text{Iteratiematrix van SOR.}} x^m$$

Bekijk voor welke ω $r_\sigma(M_{sor})$ het kleinst is, dan vind je de optimale relaxatie parameter ω_{opt}, want hoe kleiner de spectraalradius, deste sneller convergeert de SOR methode. (als $r_\sigma(M_{sor}) < 1$ voor deze ω_{opt}).